ISRAEL JOURNAL OF MATHEMATICS **124** (2001), 299–312

PROPAGATION DES SINGULARITÉS GEVREY POUR L'ÉQUATION DE CAUCHY-RIEMANN DÉGÉNÉRÉE

PAR

BERNARD LASCAR

Institut de mathématiques de Jussieu, UMR 7586 du CNRS
Université Pierre et Marie Curie, Case 82
4 Place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France
e-mail: berl@ccr.jussieu.fr

ET

NICOLAS LERNER

Université de Rennes 1, Campus de Beaulieu
35042 Rennes Cedex, France
e-mail: lerner@univ-rennes1.fr

ABSTRACT

In this paper we study the degenerate Cauchy-Riemann equation in Gevrey classes. We first prove the local solvability in Gevrey classes of functions and ultra-distributions. Using microlocal techniques with Fourier integral operators of infinite order and microlocal energy estimates, we prove a result of propagation of singularities along one dimensional bicharacteristics.

1. Introduction et énoncés

Dans ce travail on prouve un énoncé de propagation des singularités Gevrey pour des équations de Cauchy-Riemann dégénérées. Les outils utilisés sont ceux de l'analyse microlocale Gevrey voir [5], que l'on reformule ici de manière plus simple et plus agréable et ceux de l'analyse des équations de Cauchy-Riemann dégénérées pour lesquels on renvoie le lecteur au Chapitre 26 de [4].

Received January 31, 2000

On considère une équation de Cauchy-Riemann dégénérée

$$L = \partial/\partial t + ia(t,x)\partial/\partial x_1 + b(t,x) \tag{1.1}$$

où $a \geq 0$ et $a, b \in C^\infty(\mathbb{R}_t, G^s_A(\mathbb{R}^n_x))$. On étudie la résolubilité locale dans les espaces G^s et la propagation des singularités Gevrey. Les outils essentiels sont des estimations d'énergie avec des poids d'ordre infinis adaptés au contexte Gevrey.

Dans la première section on développe le calcul pseudo-différentiel utilisé plus loin pour la résolution de l'équation de Cauchy-Riemann.

On décrit dans la section 3 un calcul microlocal avec grand paramètre dans les espaces de Gevrey. On redémontre les résultats de [5] par une méthode plus simple, puis on prouve enfin le résultat de propagation des singularités.

On énonce les résultats:

THÉORÈME 1: *Soit M un ensemble d'opérateurs de Cauchy-Riemann de la forme $P(t,x,D_x) = D_t + ia(t,x)D_x + b(t,x)$ où les fonctions $a(t,x) \geq 0$ et $b(t,x)$ appartiennent à un sous ensemble borné de $C^\infty(\mathbb{R}_t, G^s_A(\mathbb{R}_x))$ pour un nombre $A > 0$ et pour $2 \leq s < \infty$. Il y a une constante $c > 0$ et un $\varepsilon > 0$ tels que pour tout f dans un sous-ensemble borné de $C^\infty(\mathbb{R}_t, G^s_\varepsilon(\mathbb{R}_x))$ on peut trouver u, avec u et $(\partial/\partial t)u$ dans un autre sous ensemble borné de $C^1(\mathbb{R}_t, G^s_\varepsilon(\mathbb{R}_x))$, tels que $Pu = f$ dans $\{(t,x); |t| < 1, |x| < c\}$.*

Le théorème 1 est simplement un résultat de résolubilité dans la classe de Gevrey G^s d'une équation de Cauchy-Riemann à coefficients G^s. On a écrit dans le théorème 1 une forme plus précise, on voit notamment que le domaine d'existence de la solution u ne dépend que de A et de l'ensemble M.

Remarque 1: Dans le théorème 1 on ne sait pas si la condition $s \geq 2$ est nécessaire, le cas analytique est connu et n'exige pas $a(t,x) \geq 0$ (c'est le théorème de Cauchy-Kovalevsky). Notre preuve s'appuie essentiellement sur une estimation à priori comme celles de [4] page 124, Lemme 26.7.1 et de [6]; dans le cas $s < 2$ cette estimation n'est probablement pas vraie.

De plus notre preuve démontre également la résolubilité locale dans les ultradistributions ce qui justifie la condition (P) et peut-être la condition $s \geq 2$. Noter que le cas analytique ie. la résolubilité dans les hyperfonctions sous la condition (Ψ) est due à Trépreau [8].

On prouve ensuite un résultat de propagation des singularités dans un cadre semi-classique avec un grand paramètre λ:

THÉORÈME 2: *Soit $s \geq 2$, soit λ un grand paramètre soit*

$$L_1 = P(t, x, D_t/\lambda, D_x/\lambda, \lambda) = D_t/\lambda + ia(t, x, D_x/\lambda)(D_{x_1}/\lambda) + b(t, x, D_x/\lambda) \tag{1.2}$$

où $x = (x_1, x') \in \mathbb{R}^{n+1}$ une équation pseudo-différentielle de "Cauchy-Riemann dégénérée", $a(t, x, \xi) \geq 0$, $a(t, x, \xi)$ et $b(t, x, \xi)$ sont des symboles Gevrey-s de degré 0. Soit $\gamma(I)$ une bicaractéristique uni-dimensionnelle de p, c'est à dire sur laquelle $a(t, X)$ s'annule. Soit $u(x, \lambda)$ une famille bornée de distributions tempérées dont le front d'onde oscillant Gevrey-s vérifie $OF_s(u) \cap \gamma(\partial I) = \emptyset$ et $OF_s(Pu) \cap \gamma(I) = \emptyset$, alors $OF_s(u) \cap \gamma(I) = \emptyset$.

Remarque 2: La preuve de ces deux théorèmes s'appuie sur le Chapitre 26 de Hörmander [4] auquel nous renvoyons le lecteur pour le cas C^∞ qui est résolu avec seulement la condition (P) mais avec la perte de ε dérivée.

Là encore on peut discuter la condition $s \geq 2$. Le cas analytique est très différent puisqu'il n'exige pas la condition (P) et qu'il suffit de savoir qu'un seul point de la bicaractéristique n'est pas dans le front d'onde analytique voir Hanges [3] et Sjöstrand [7].

Le généralisation du théorème 2 à des équations de type principal vérifiant la condition (P) peut être envisagée. La difficulté principale tient au fait que le découpage microlocal utilisé pour la propagation des singularités (voir [4] page 151 lemme 26.10.2) entraînerait pour les transitions entre les différentes zones des pertes dans les classes de Gevrey. Ce qui veut dire exactement qu'on sait traiter de manière optimale chaque zone mais pas toutes à la fois.

2. Résolution de l'équation de Cauchy-Riemann dans les espaces de Gevrey

2.1. CALCUL SYMBOLIQUE GEVREY. Soit $1 \leq s < \infty$, on note $G^s(\mathbb{R}) = \bigcup_{A>0} G^s_A(\mathbb{R})$, où $G^s_A(\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions $f(x)$ qui satisfont aux estimations:

$$|D^\alpha_x f(x)| \leq CA^\alpha \alpha!^s \quad \text{uniformément en } x \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

On considère une équation de Cauchy-Riemann dégénérée comme (1.1) l'objectif de ce paragraphe est de trouver suffisamment de solutions G^sà l'équation de Cauchy-Riemann.

Si A et B sont des opérateurs pseudo-différentiels de symbole de Weyl respectivement $a(x, \xi)$ et $b(x, \xi)$, on note $c = a\sharp b$ le symbole de Weyl de AB.

Definition 1: Soit g_X un champ de métriques riemaniennes sur $\mathbb{R}^{2n}$, $m(X)$ un poids, on note $\Sigma^s_A(m,g)$ l'espace des fonctions $f(X)$ qui satisfont aux estimations:

$$\exists C > 0 \text{ tels que } \forall j \in \mathbb{N} \tag{2.2}$$
$$|D^j f(X)(t_1, \dots, t_j)| \leq CA^j j!^s m(X) g_X(t_1)^{1/2} \cdots g_X(t_j)^{1/2}.$$

Enfin on note $\Sigma^s(m,g) = \bigcup_{A>0} \Sigma^s_A(m,g)$.

PROPOSITION 1: *Soit $q_\varepsilon(\xi) = \exp(-\varepsilon\langle\xi\rangle^{1/s})$, et $\varphi \in G^s_{A_0}(\mathbb{R})$ une fonction Gevrey-s à support compact, si ε est assez petit par rapport à A_0^{-1}, pour tout $M \in \mathbb{N}$,*

$$q_\varepsilon^{-1} r_M(q_\varepsilon, \varphi) = q_\varepsilon^{-1}(q_\varepsilon \sharp \varphi)(x,\xi) - \sum_{0\leq j\leq M-1} \frac{1}{j!}((iD_y D_\eta)^j \widetilde{\varphi}(x+y-i\varepsilon H(\xi,\eta)))|_{y=\eta=0}$$
$$\in \Sigma^s(\langle\xi\rangle^{-M}, g) + \mathcal{O}(\exp(-1/C\langle\xi\rangle^{1/s})). \tag{2.3}$$

Soit $g = |dx|^2 + \langle\xi\rangle^{-2}|d\xi|^2$, on doit donc prouver que $q_\varepsilon^{-1}(q_\varepsilon\sharp\varphi)(x,\xi) \in \Sigma^s(1,g)$.

On a besoin d'introduire des poids d'ordres infinis adaptés au contexte Gevrey dans une estimation d'énergie. On a besoin d'un minimum de calcul pseudo-différentiel. Ceci étant cette section est élémentaire et ne requiert aucune connaissance particulière du calcul pseudo-différentielle Gevrey-s pour laquelle on renverra le lecteur à [5].

Soit $\varepsilon > 0$ une petite constante positive et $\varphi(x) \in G^s_{A_0}(\mathbb{R})$ à support compact. Soit $q_\varepsilon(\xi) = \exp(-\varepsilon\langle\xi\rangle^{1/s})$, on veut estimer $\sigma(x,\xi) = (q_\varepsilon\sharp\varphi)(x,\xi)$. On va prouver que que $q_\varepsilon^{-1}(\xi)(q_\varepsilon\sharp\varphi)(x,\xi)$ est un symbole Gevrey.

On a besoin d'extensions presque analytiques des fonctions Gevrey : si $\varphi(x) \in G^s_{A_0}(\mathbb{R})$ il existe une fonction $\widetilde{\varphi}(z) \in G^s_{A_1}(\mathbb{C})$ où A_1 ne dépend que de A_0, $\widetilde{\varphi}|_{\mathbb{R}} = \varphi$, $\overline{\partial}\widetilde{\varphi}$ plat sur $\mathbb{R}$, donc $|\overline{\partial}\widetilde{\varphi}(z)| \leq C\exp(-A_2|\operatorname{Im} z|^{-1/(s-1)})$. On doit pour ce faire utiliser le théorème de moments de L. Carleson [2] et raisonner comme dans l'argument de Borel.

$$q_\varepsilon^{-1}\sigma(x,\xi) = q_\varepsilon^{-1}\int e^{iy\eta} q_\varepsilon(\xi+\eta)\varphi(x+y)\,dy d\eta; \tag{2.4}$$

On se débarrasse de l'intégration dans la zone $\{(\xi,\eta), |\eta| \geq \varepsilon_1\langle\xi\rangle\}$ dans l'intégrale (2.4) à l'aide d'une intégration par parties avec l'opérateur $|\eta|^{-2N}(1-\Delta_y)^{2N}$ ceci produit une contribution en

$$A_0^{2N}(2N)!^s|\eta|^{-2N}\exp(\varepsilon\langle\xi\rangle^{1/s}) = \mathcal{O}(\exp(-1/C\langle\xi\rangle^{1/s}))$$

dans $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ par un choix convenable de N, si ε est petit par rapport à A_0. L'autre contribution à l'intégrale (2.4) est $\sigma_{II}(x,\xi)$:

$$q_\varepsilon^{-1}(\xi)\sigma_{II}(x,\xi) = q_\varepsilon^{-1}(\xi)\int e^{iy\eta}\chi(\eta/\langle\xi\rangle) q_\varepsilon(\xi+\eta)\varphi(x+y)\,dy d\eta. \tag{2.5}$$

Bien entendu, il faut écrire $q_\varepsilon = \exp(i\varepsilon f(\xi))$ où $f(\xi) = i\langle\xi\rangle^{1/s}$, dans l'intégrale (2.5) on a la phase $-\varepsilon f(\xi) + \varepsilon f(\xi+\eta) + y\eta = i\varepsilon\eta H(\xi,\eta) + y\eta$, avec $H(\xi,\eta) = 1/i\int_0^1 f'_\xi(\xi + t\eta)dt$ qui est réelle.

Ensuite on déforme le contour d'intégration. Soit $\gamma_\sigma(y,\eta) = (y + i\sigma H(\xi,\eta),\eta)$, $(y,\eta)\in\mathbb{R}^2$ la déformation de contours, et J_σ l'intégrale sur le contour γ_σ. D'aprés la formule de Stokes, on peut majorer

$$|J_1 - J_0| \le C \sup_{0\le\sigma\le 1,(y,\eta)\in\mathbb{R}^2} |\overline{\partial}\tilde{F}(\gamma_\sigma(y,\eta),x,\xi)|$$

où $F(y,\eta,x,\xi) = \widetilde{\varphi}(x+y)\chi(\eta/\langle\xi\rangle)\exp(i\varepsilon\eta(y+i\varepsilon H(\xi,\eta))$. La contribution au $\overline{\partial}\tilde{F}$ vient seulement de $\overline{\partial}\widetilde{\varphi}(x+y)$ qui est majorée par $\exp(-cA_2(\sigma\langle\xi\rangle^{1/s-1})^{-1/(s-1)}) \le \exp(-cA_2\langle\xi\rangle^{1/s})$. La contribution de la phase $\eta(y+i\varepsilon H(\xi,\eta))$ le long de γ_σ se majore par $\exp(C\varepsilon(1-\sigma)\langle\xi\rangle^{1/s})$. On a donc prouvé que

$$\begin{aligned}(2.6)\qquad q_\varepsilon^{-1}(x,\xi)(q_\varepsilon\sharp\varphi)(x,\xi) = &\int e^{iy\eta}\chi(\eta/\langle\xi\rangle)\widetilde{\varphi}(x+y-i\varepsilon H(\xi,\eta))dyd\eta\\ &+\mathcal{O}(\exp(-1/C\langle\xi\rangle^{1/s}))\quad\text{dans } C^\infty(\mathbb{R}^2).\end{aligned}$$

On développe par la formule de Taylor

$$\begin{aligned}(2.7)\qquad \widetilde{\varphi}(x+y-i\varepsilon H(\xi,\eta)) = &\sum_{0\le j\le M-1}\partial_x^j\widetilde{\varphi}(x-i\varepsilon H(\xi,\eta))/j!y^j\\ &+\widetilde{\varphi}_M(x,y-i\varepsilon H(\xi,\eta))y^M/M!\end{aligned}$$

où uniformément en M, on a:

$$|D^\beta_{x,y}\widetilde{\varphi}_M(x,y)| \le CA_0^{M+\beta}M!^s\beta!^s.$$

On écrit

$$\begin{aligned}(2.8)\quad q_\varepsilon^{-1}(x,\xi)(q_\varepsilon\sharp\varphi)(x,\xi) = &\sum_{0\le j\le M-1}\frac{1}{j!}((iD_yD_\eta)^j\widetilde{\varphi}(x+y-i\varepsilon H(\xi,\eta))|_{y=\eta=0}\\ &+\int e^{iy\eta}(D_\eta{}^M(\chi(\eta/\langle\xi\rangle)\widetilde{\varphi}_M(x+y-i\varepsilon H(\xi,\eta)))dyd\eta\\ &+\mathcal{O}(\exp(-1/C\langle\xi\rangle^{1/s}))\quad\text{dans } C^\infty(\mathbb{R}^2).\end{aligned}$$

On majore le reste $r_M(q_\varepsilon,\varphi)$ dans le développement de Taylor

$$\begin{aligned}(2.9)\quad &|q_\varepsilon^{-1}r_M(q_\varepsilon,\varphi)|\\ &= |q_\varepsilon^{-1}(x,\xi)(q_\varepsilon\sharp\varphi)(x,\xi) - \sum_{0\le j\le M-1}\frac{1}{j!}((iD_yD_\eta)^j\widetilde{\varphi}(x+y-i\varepsilon H(\xi,\eta))|_{y=\eta=0}\\ &\le CA_0^M(M!)^{2s-1}\langle\xi\rangle^{-M} + \mathcal{O}(\exp(-1/C\langle\xi\rangle^{1/s})\end{aligned}$$

si ε est assez petit par rapport à A_0.

Bien entendu (2.9) donne un développement asymptotique plus précis mais nous n'en aurons pas besoin.

2.2. L'ESTIMATION D'ÉNERGIE. On considère une équation de Cauchy-Riemann dégénérée $P = D_t + ia(t,x)D_x + b(t,x)$ où $a(t,x) \geq 0$, $a(t,x)$ et $b(t,x) \in C^\infty(\mathbb{R}_t, G^s_A(\mathbb{R}_x))$ pour un $s > 1$ et un nombre A donnés.

Soit $P_\varepsilon = q_\varepsilon(D_x)P(x,D_x)q_\varepsilon^{-1}(D_x)$ l'opérateur transmué par le poids $q_\varepsilon(\xi) = \exp(-\varepsilon\langle\xi\rangle^{1/s})$. On trouve donc que

$$P_\varepsilon = D_t + i(q_\varepsilon \sharp a)(t,x,\xi)q_\varepsilon^{-1}(\xi)\xi + i(q_\varepsilon \sharp b)(t,x,\xi)q_\varepsilon^{-1}(\xi), \tag{2.10}$$

on utilise la proposition 1 pour écrire

$$\begin{aligned}(q_\varepsilon \sharp a)(t,x,\xi)q_\varepsilon^{-1}(\xi) =& \tilde{a}(t, x - i\varepsilon f'_\xi(\xi)) + \Sigma^s(\langle\xi\rangle^{-1}, g) \\ &+ \mathcal{O}(\exp(-1/C\langle\xi\rangle^{1/s})),\end{aligned} \tag{2.11}$$

où $\tilde{a}(t,x)$ est une extension presque analytique de $a(t,x)$, $f(\xi) = \langle\xi\rangle^{1/s}$, la relation (2.11) est aussi valable pour $b(t,x)$. On trouve que

$$(q_\varepsilon \sharp a)(t,x,D_x)q_\varepsilon^{-1}(D_x)D_x = a_1(x,\xi)^w$$

avec $a_1(x,\xi) = \tilde{a}(t, x + i\varepsilon f'_\xi(\xi))\xi + \Sigma^s(1,g) + \mathcal{O}(\exp(-1/C\langle\xi\rangle^{1/s}))$, de même

$$(q_\varepsilon \sharp b)(t,x,D_x)q_\varepsilon^{-1}(D_x) = b_1(x,\xi)^w$$

où $b_1(x,\xi) = \tilde{b}(t, x + i\varepsilon f'_\xi(\xi))\xi + \Sigma^s(1,g) + \mathcal{O}(\exp(-1/C\langle\xi\rangle^{1/s}))$.

On revient aux expressions sur le réel appliquant la formule de Taylor:

$$\begin{aligned}\tilde{a}(t, x - i\varepsilon f'_\xi(\xi)) =& a(t,x) + i\varepsilon f'_\xi(\xi)a'_x(t,x) \\ &- \varepsilon^2/2(f'_\xi(\xi))^2 a''_{xx}(t,x) + \Sigma^s(\langle\xi\rangle^{-3(1-1/s)}, g),\end{aligned} \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned}a_1(t,x,\xi) =& (a(t,x) + i\varepsilon f'_\xi(\xi)a'_x(t,x) - \varepsilon^2/2(f'_\xi(\xi))^2 a''_{xx}(t,x))\xi \\ &+ \Sigma^s(\langle\xi\rangle^{-3(1-1/s)+1} + 1, g) + \mathcal{O}(\exp(-1/C\langle\xi\rangle^{1/s}))^w,\end{aligned} \tag{2.13}$$

tandis que

$$\begin{aligned}b_1 =& (b(t,x) + i\varepsilon f'_\xi(\xi)b'_x(t,x) + \Sigma^s(\langle\xi\rangle^{-3(1-1/s)} + \langle\xi\rangle^{-1}, g) \\ &+ \mathcal{O}(\exp(-1/C\langle\xi\rangle^{1/s}))^w.\end{aligned} \tag{2.14}$$

Le deuxième terme (2.13) est purement imaginaire, le troisième terme de (2.13) est un $\Sigma^s(\varepsilon^2\langle\xi\rangle^{-1+2/s}, g)$ et n'a pas de signe, on doit donc supposer que $s \geq 2$, et on a:

$$a_1(t,x,\xi) = (a(t,x)\xi + i\varepsilon f'_\xi(\xi)a'_x(t,x)\xi + \Sigma^s(1,g) + \mathcal{O}(\exp(-1/C\langle\xi\rangle^{1/s}))^w \tag{2.15}$$

tandis que

$$b_1(t,x,\xi) = (\Sigma^s(1,g) + \mathcal{O}(\exp(-1/C\langle\xi\rangle^{1/s}))^w. \tag{2.16}$$

On sépare les parties autoadjointes et anti-autoadjointes de A_1 et B_1:

$$a'_1 = (a(t,x)\xi + \Sigma^s(1,g) + \mathcal{O}(\exp(-1/C\langle\xi\rangle^{1/s}))^w, \tag{2.17}$$

$$a''_1 = (\varepsilon f'_\xi(\xi)a'_x(t,x)\xi + \Sigma^s(1,g) + \mathcal{O}(\exp(-1/C\langle\xi\rangle^{1/s}))^w, \tag{2.18}$$

$$b'_1, b''_1 = (\Sigma^s(1,g) + \mathcal{O}(\exp(-1/C\langle\xi\rangle^{1/s}))^w. \tag{2.19}$$

Soit Q un opérateur autoadjont on a

$$\mathrm{Im}(QP_\varepsilon u, Qu) = \mathrm{Im}((D_t + i(A_1 + B_1))Qu, Qu) + \mathrm{Im}([Q, P_\varepsilon]u, Qu). \tag{2.20}$$

Soit $h(\xi)$ une fonction $G^s(\mathbb{R})$ $h \geq 0$, $h = 1$ dans $[2,\infty[$, supportée dans $[1,\infty[$, soit $\lambda > 0$ un grand paramètre on prend $Q(D_x) = h(D_x)e^{\lambda t}$.

$\mathrm{Im}(P_\varepsilon Qu, Qu) = ((a'_1 + b'_1)Qu, Qu) \geq -K|e^{2\lambda t}h(D_x)u|^2$ d'aprés l'inégalité de Gärding.

Tandis que $\mathrm{Im}[Q, P_\varepsilon] = \lambda e^{\lambda t} + e^{\lambda t}\mathcal{O}(\langle\xi\rangle^{-\infty})$, avec la notation $\mathcal{O}(\langle\xi\rangle^{-\infty}) = \bigcap_N S(\langle\xi\rangle^{-N}, g)$.

Donc si $\lambda \geq 2K$, on a pour $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$

$$\frac{\lambda}{2}|e^{\lambda t}h(D_x)u|^2 \leq C|e^{\lambda t}P_\varepsilon u|^2 + C_N|\langle\xi\rangle^{-N}e^{\lambda t}u|^2. \tag{2.21}$$

On montre une inégalité analogue à (2.21) avec $h(-D_x)$ et $e^{-\lambda t}$, puis on note que $1 - h(\xi) - h(-\xi) \in \cap_N S(\langle\xi\rangle^{-N}, g)$ enfin que $\lim_{c\to 0}|\langle\xi\rangle^{-N}u|/|u| = 0$ quand le support de u est dans $\{x; |x| < c\}$. On conclut donc :

PROPOSITION 2: *Si $A > 0$ est donné et si $s \geq 2$ on peut trouver un $\varepsilon > 0$ assez petit tels que si $a(t,x) \geq 0$ et $b(t,x)$ appartiennent à des sous ensembles bornés de $C^1(\mathbb{R}_t, G^s_A(\mathbb{R}_x))$, on ait des constantes c, $C > 0$ telles que*

$$|u| \leq C|P_\varepsilon u| \tag{2.22}$$

si $u \in C_0^\infty((t,x); |t| < 1, |x| < c\}$ avec $P_\varepsilon = q_\varepsilon(D_x)P(x,D_x)q_\varepsilon^{-1}(D_x)$ et $P(t,x,D_x) = D_t + ia(t,x)D_x + b(t,x)$.

2.3. Résolution de l'équation de Cauchy-Riemann. On va utiliser la proposition 2 pour résoudre l'équation de Cauchy-Riemann dans les classes de Gevrey.

On applique l'inégalité (2.22) à $u = \psi q_\varepsilon v$ où $\psi \in G^s$ et supportée par $\{x; |x| < c\}$:

$$P_\varepsilon^* u = q_\varepsilon P^* v + q_\varepsilon P^* q_\varepsilon^{-1}(\psi - 1) q_\varepsilon \varphi_0 v$$

où $\psi \equiv 1$ sur un voisinage du support de φ_0 et $\varphi_0 v = v$, comme $q_\varepsilon^{-1}(\psi - 1) q_\varepsilon \varphi_0 = \mathcal{O}(\exp(-1/C\langle\xi\rangle^{1/s}))$, on en déduit la proposition

Proposition 3: *Si $A > 0$ est donné et si $s \geq 2$ on peut trouver un $\varepsilon > 0$ tels que si $a(t,x) \geq 0$ et $b(t,x)$ appartiennent à des sous ensembles bornés de $C^1(\mathbb{R}_t, G_A^s(\mathbb{R}_x))$, on ait des constantes c, $C > 0$ telles que*

$$|q_\varepsilon u| \leq C |q_\varepsilon P^* u| \tag{2.23}$$

si $u \in C_0^\infty((t,x); |t| < 1, |x| < c\})$ avec $P(t,x,D_x) = D_t + ia(t,x)D_x + b(t,x)$ et $q_\varepsilon(D_x) = \exp(-\varepsilon\langle D_x\rangle^{1/s})$.

Soit $G_0 = \{g = P^* u;\ u \in C_0^\infty(\Omega)\}$ où $\Omega = \{(t,x); |t| < 1, |x| < c\}$, muni de la semi norme $g \to |q_\varepsilon g|$. Soit $f \in G_\varepsilon^s$, la forme linéaire $g \in G_0 \to (u,f)$ est majorée par $|(u,f)| \leq C|q_\varepsilon^{-1} f||q_\varepsilon g|$ d'aprés (2.23).

Utilisant le théorème d'Ahn-Banach, on trouve un élément $v \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tel que pour tout $u \in C_0^\infty(\Omega)$, $(v, P^* u) = (f,u)$ et pour tout $\alpha \in C_0^\infty(\Omega)$ on a $|(u,\alpha)| \leq C|q_\varepsilon^{-1} f||q_\varepsilon \alpha|$, donc $v \in G_\varepsilon^s$ et $Pv = f$ dans Ω.

Théorème 3: *Soit M un ensemble d'opérateurs de Cauchy-Riemann de la forme $P(t,x,D_x) = D_t + ia(t,x)D_x + b(t,x)$ où les fonctions $a(t,x) \geq 0$ et $b(t,x)$ appartiennent à des sous ensembles bornés de $C^\infty(\mathbb{R}_t, G_A^s(\mathbb{R}_x))$ pour un nombre $A > 0$ et pour $2 \leq s < \infty$. Il y a une constante $c > 0$ et un $\varepsilon > 0$ tels que pour tout f dans un sous-ensemble borné de $C^\infty(\mathbb{R}_t, G_\varepsilon^s(\mathbb{R}_x))$ on peut trouver u, avec u et $(\partial/\partial t)u$ dans un autre sous ensemble borné de $C^1(\mathbb{R}_t, G_\varepsilon^s(\mathbb{R}_x))$, tels que $Pu = f$ dans $\{(t,x); |t| < 1, |x| < c\}$.*

On suit maintenant le raisonnement de L. Hörmander 4 Corollaire 26.7.8 page 131 pour déduire:

Proposition 4: *Soit M un ensemble d'opérateur de Cauchy-Riemann de la forme $P(t,x,D_x) = D_t + ia(t,x)D_x + b(t,x)$ où les fonctions $a(t,x) \geq 0$ et $b(t,x)$ appartiennent à des sous ensembles bornés de $C^\infty(\mathbb{R}_t, G_A^s(\mathbb{R}_x))$ pour un nombre $A > 0$ et pour $2 \leq s < \infty$. Pour tout $\eta > 0$ on peut trouver des voisinages ouverts arbitrairement petits de 0, $V_0 \Subset V_1 \Subset V_2$ et $T > 0$ tels qu'il existe un* *ensemble de solutions de l'équation* $(D_t + ia(t,x)D_x + b(t,x))U(t,x) = 0$ *dans* V_2, $U(t,x)$ *appartient à sous-ensemble borné de* $C^\infty(\mathbb{R}_t, G^s_\varepsilon(\mathbb{R}_x))$ *et*

$$\operatorname{Re} U(t,x) \geq 0 \quad \text{dans } |t| < T,\ x \in V_2, \tag{2.24}$$

$$\operatorname{Re} U(t,x) > 1 \quad \text{dans } |t| < T,\ x \in V_2 \backslash V_1, \tag{2.25}$$

$$\operatorname{Re} U(t,x) < \eta \quad \text{dans } |t| < T,\ x \in V_0. \tag{2.26}$$

3. Le calcul microlocal avec grand paramètre

On va développer ici les éléments d'un calcul d'OIF à phases complexes dans le cadre microlocal Gevrey avec un grand paramètre, nous retrouverons dans cette section les résultats de [5]. Soit $f \in G^s_0(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{C})$ une fonction de poids près de (x_0, ξ_0), soit λ le grand paramètre, soit $a(x,\xi,\lambda)$ un symbole Gevrey-s supporté par un voisinage de (x_0,ξ_0), on considère des opérateurs intégraux de Fourier à phase complexes

$$\mathcal{F}u(x,\lambda) = \Big(\frac{\lambda}{2\pi}\Big)^n \int e^{i\lambda\Phi(x,y,\theta)} a\Big(\frac{x+y}{2}, \theta, \lambda\Big) u(y)dyd\theta \tag{3.1}$$

où

$$\Phi(x,y,\theta) = (x-y)\theta + i\mu f\Big(\frac{x+y}{2}, \theta\Big) \quad \text{où } \mu = \mu_0 \lambda^{-1+1/s},$$

μ_0 est un petit paramètre.

Il est facile de prouver:

PROPOSITION 5: *Soient*

$$\Phi(x,y,\theta) = (x-y)\theta + i\mu f(\frac{x+y}{2}, \theta) \quad \text{et } \Psi(x,y,\eta) = (x-y)\eta - i\mu f\Big(\frac{x+y}{2}, \eta\Big)$$

deux fonctions de phase, alors les relations canoniques Λ_Φ *et* Λ_Ψ *sont mutuellement réciproques.*

Il suffit d'écrire Λ_Φ et Λ_Ψ et de voir qu'il s'agit d'une particularité de la quantification de Weyl.

On cherche donc un inverse à $\mathcal{F}$ sous la forme

$$\mathcal{G}u(x,\lambda) = \Big(\frac{\lambda}{2\pi}\Big)^n \int e^{i\lambda\Psi(x,y,\eta)} b\Big(\frac{x+y}{2}, \eta, \lambda\Big) u(y)dyd\eta. \tag{3.2}$$

On prouve maintenant le théorème:

THÉORÈME 4: *Soit* $\rho_0 = (x_0, \xi_0) \in T^*\mathbb{R}^n$. *On peut trouver des symboles* $a(x,\xi,\lambda,\mu)$ *et* $b(x,\xi,\lambda,\mu)$ *tels que*

(i)

$$\mathcal{G}\mathcal{F} = I + R, \tag{3.3}$$

$$\mathcal{F}\mathcal{G} = I + R_1. \tag{3.4}$$

R et R_1 sont $\mathcal{O}(C\exp(-C^{-1}\lambda^{1/s}))$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ prés de ρ_0.

(ii) *Si $P(x, D_x/\lambda) = (p)^{w_\lambda}$ alors*

$$\mathcal{G}P\mathcal{F} = (p + i\mu\{p, f\} + \mathcal{O}(\lambda^{-1} + \mu^2) + \rho)^{w_\lambda} \tag{3.5}$$

où ρ est $\mathcal{O}(C\exp(-C^{-1}\lambda^{1/s}))$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ prés de ρ_0.

Preuve: Le calcul de Weyl assure au moins formellement que $\mathcal{G}\mathcal{F} = (q)^{w_\lambda}$ où
(3.6)

$$q(X, \lambda) = c_n\lambda^{2n} \int_{\mathbb{R}^{4n}} e^{i\lambda(\sigma(Y,Z)+i\mu(f(X+Y)-f(X+Z))}a(X + Y)b(X + Z)dYDZ.$$

On étudie (3.6) par la formule de la phase stationnaire. La phase est

$$H(X, \mu; Y, Z) = \sigma(Y, Z) + i\mu(f(X + Y) - f(X + Z)). \tag{3.7}$$

On observe que si $Y_c(X, \mu)$ est la solution implicite de $Y = i\mu H_f(X + Y)$ le point critique de H (i.e., le zéro de $\partial_{Y,Z}H = 0$) est obtenu en $Y = Z = Y_c(X, \mu)$.

On observe les particularités suivantes: la phase H ne diffère d'une phase quadratique réelle non dégénérée que par un $\mathcal{O}(\mu)$, le point critique est $\mathcal{O}(\mu)$.

Utilisant le lemme de Morse, on écrit $H(X, \mu; Y, Z) = H_c(X; \mu) + \frac{1}{2}\alpha(\tilde{Z}, \tilde{Z}) + \mathcal{O}(\mu^\infty)$ où $\tilde{Z} = Q(X, \mu; Y, Z)(Y - Y_c, Z - Z_c)$ avec $Q - I = \mathcal{O}(\mu)$; dans cette formule le $\mathcal{O}(\mu^\infty)$ vient des $\overline{\partial}_{Y,Z}H$. De plus $H_c(X, \mu) = 0$ et donc q est bien un symbole.

Après le changement de variables $(Y, Z) \to \tilde{Z}$, le réel devient

$$\{\tilde{X} + iG(X, \mu; \tilde{X}); \tilde{X} \in V(0) \cap \mathbb{R}^{4n}\}.$$

Après un changement de variables (3.6) est l'intégrale sur l'image de $\mathbb{R}^{4n}$ par $\Gamma_1(\tilde{X}) = \tilde{X} + iG(X, \mu; \tilde{X})$.

On observe que $G(X, \mu; \tilde{X}) = \mathcal{O}(\mu)$.

On effectue la déformation de contours $\tilde{X} \in V(0) \cap \mathbb{R}^{4n} \to \Gamma_\sigma(\tilde{X}) = \tilde{X} + i\sigma G(X, \mu, \tilde{X}) \in \mathbb{C}^{4n}$ pour $0 \leq \sigma \leq 1$. Comme $\operatorname{Im}\Gamma_\sigma(\tilde{X}) = \mathcal{O}(\mu)$ et $\operatorname{Im} H|_{\Gamma_\sigma} \geq -C\mu$, l'application de la formule de Stokes prouve que la difference entre l'intégrale sur le contour Γ_1 et le contour Γ_0 est un $\mathcal{O}(C\exp(-C^{-1}\lambda^{1/s}))$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$.

On a donc traité le comportement au voisinage du point critique, plus loin il suffira de faire des intégrations par parties. Plus précisément quand $|(Y,Z)| \geq r$, $|\partial_{Y,Z}H| \geq c\langle(Y,Z)\rangle$. On va intégrer par parties avec l'opérateur ${}^tL$ où

$$L = \frac{\overline{\partial_{Y,Z}H}}{|\partial_{Y,Z}H|^2}\frac{\partial}{\partial_{Y,Z}}. \tag{3.8}$$

On introduit des normes formelles

$$N(f,T)(x) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{|D^j f(x)|}{j!^s}T^j \tag{3.9}$$

et

$$\dot{N}(f,T)(x) = \sum_{j\in\mathbb{N}^*} \frac{|D^j f(x)|}{j!^s}T^j. \tag{3.10}$$

On a le lemme

Lemme 1:

$$N(fg,T)(x) \leq N(f,T)(x)N(g,T)(x), \tag{3.11}$$

$$\dot{N}(f\circ g,T)(x) \leq \dot{N}(f,\dot{N}(g,T)(x))(f(x)). \tag{3.12}$$

Le lemme est évident. Comme

$$\dot{N}(x_j/\langle x\rangle^{-2},T) \leq CT\langle x\rangle^{-1}(1-AT\langle x\rangle^{-1})^{-1} \tag{3.13}$$

et que

$$\dot{N}(H'_{Y,Z},T) \leq CT, \tag{3.14}$$

on obtient donc

$$\dot{N}(H'_{Y,Z}/\langle H'_{Y,Z}\rangle^{-2},T) \leq CT\langle H'_{Y,Z}\rangle^{-1}(1-A\dot{N}(H'_{Y,Z},T)\langle H'_{Y,Z}\rangle^{-1})^{-1}. \tag{3.15}$$

Soit dans $|Y,Z| \geq r$

$$\dot{N}(H'_{Y,Z}/\langle H'_{Y,Z}\rangle^{-2},T) \leq CT\langle(Y,Z)\rangle^{-1}(1-AT\langle(Y,Z)\rangle^{-1})^{-1}. \tag{3.16}$$

Par ailleurs pour tout $\varepsilon > 0$,

$$N(Df,T) \leq C\varepsilon^{-s}T^{-1}N(f,(1+\varepsilon)^sT). \tag{3.17}$$

On en déduit

Lemme 2: *Si* $f \in G^s(\mathbb{R}^{4n},\mathbb{C})$, $N({}^tL^N f,T) \leq CA^N N!^s\langle(Y,Z)\rangle^{-N}$.

Appliquant le lemme 2 à la contribution de $|Y,Z| \geq r$ à l'intégrale (3.6), on obtient un terme $\mathcal{O}(C\exp(-C^{-1}\lambda^{1/s}))$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$. Ce qui achève la preuve du théorème.

4. La propagation des singularités pour l'équation de Cauchy-Riemann dégénérée

Soit $P(t,x,D_t/\lambda,D_x/\lambda) = D_t/\lambda + ia(t,x,D_x/\lambda)(D_{x_1}/\lambda) + b(t,x,D_x/\lambda)$ où $x = (x_1,x') \in \mathbb{R}^{n+1}$ une équation de "Cauchy-Riemann dégénérée", $a(t,x,\xi) \geq 0$, $a(t,x,\xi)$ et $b(t,x,\xi)$ sont des symboles Gevrey-s de degré 0. On a besoin d'une inégalité d'énergie, la preuve de cette inégalité introduit des métriques 2-microlocales

$$g_1 = |dx'|^2 + |d\xi'|^2 + |dx_1|^2 + |d\xi_1|^2/(\lambda^{-1} + |\xi_1|)^2. \tag{4.1}$$

Ces métriques sont lentes et σ tempérées, la fonction "H" de ce calcul symbolique vaut $H(\xi) = \lambda^{-1}(\lambda^{-1} + |\xi_1|)^{-1}$. Soit $h(\xi_1) \in G^s(\mathbb{R})$ une fonction égale à 1 dans $\xi_1 \geq 1$, supportée par $\xi_1 \geq 1/2$.

On introduit des multiplicateurs $Q_\pm = e^{\mp kt}h(\pm D_1)$ et raisonnant comme pour l'équation de Cauchy-Riemann ordinaire voir [6] pour les détails, on prouve l'inégalité:

$$\lambda^{-2}|u|^2 + \lambda^{-1}(A\Lambda_1 u, \Lambda_1 u) \leq C|Pu|^2 \text{ si } u \in C_0^\infty([-T,T] \times \{x, |x_1| < c_T\}) \tag{4.2}$$

où $\Lambda_1 = (|D_1/\lambda|^2 + \lambda^{-2})^{1/4}$, $A = a(t,x,D_x/\lambda)$, avec $A \geq 0$ si on change $b(t,x,\xi)$.

Soit f une fonction de poids Gevrey-s, on conjugue P par $\mathcal{F}$ défini par (3.1) on note $Q = \mathcal{G}P\mathcal{F}$. D'aprés le théorème 2, le symbole de Weyl de Q est

$$q(x,\xi) = (p + i\mu\{p,f\} + \mathcal{O}(\lambda^{-1} + \mu^2) + \rho). \tag{4.3}$$

On considère une bicaractétrisique uni-dimensionnelle de P,

$$\gamma(I) = \{(t,\tau,x,\xi); t \in I, \tau = 0, x = 0, \xi' = \xi_0', \xi_1 = 0\}$$

passant par $\rho_0 = (0,0,0,\xi_0)$ sur laquelle $a(t,x)$ s'annule à l'ordre 2, et où $\xi_1 = 0$.

Soit $V(\rho_0)$ un voisinage de ρ_0 assez petit pour que l'on puisse construire dans $I \times V(\rho_0)$ une fonction $f \in G_0^s$ telle que $(\partial/\partial t + iaH_{\xi_1})f = 0$ dans $I \times V(\rho_0)$, $\operatorname{Re} f \geq 0$ dans $I \times V(\rho_0)$, $\operatorname{Re} f > 1$ dans $I \times (V(\rho_0)\backslash V_1(\rho_0))$, $\operatorname{Re} f < \varepsilon$ dans $I \times V_0(\rho_0)$ où $V_0(\rho_0) \Subset V_1(\rho_0) \Subset V(\rho_0)$.

$g = \mu\{p,f\} = i\mu\xi_1(g_1.\nabla a\ )$, g_1 est un symbole de degré 0. On veut estimer $||Gu||^2$ où $G = (g)^{w_\lambda}$. $g^2 \leq C\mu^2 a\lambda_1^2$ où $\lambda_1(\xi) = (\xi_1^2 + \lambda^{-2})^{1/4}$. $(g\#g - c\mu^2\lambda_1\#a\#\lambda_1)^{w_\lambda}$ est majoré par un opérateur de la classe $S(\mu^2\lambda_1^2 H^2, g_1)$ d'après l'inégalité de Fefferman-Phong. Donc

$$||Gu||^2 \leq C\mu^2(\lambda^{-1}|u|^2 + (A\Lambda_1 u, \Lambda_1 u)). \tag{4.4}$$

Ces termes sont absorbables dans le membre de droite de (4.2) car $s \geq 2$.

Dans $\Omega = I \times V(\rho_0)$, q ne diffère de p que par le terme $g + \mathcal{O}(\lambda^{-1} + \mu^2) + \rho$, où de plus ρ est $\mathcal{O}(C\exp(-C^{-1}\lambda^{1/s}))$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$, donc comme $s \geq 2$ on a aussi:

$$(4.5)\qquad |\omega u| \leq C|Q\omega_1 u| + C\exp(-C^{-1}\lambda^{1/s})|u| \quad \text{si } u \in C_0^\infty(I \times \mathbb{R}^n)$$

si ω et ω_1 sont des opérateurs pseudo-différentiels sur $\mathbb{R}^n$ supportés par $V(\rho_0), \omega_1 \equiv 1$ sur le support de ω.

On applique l'inégalité (4.5) à $v = \mathcal{G}u$, donc $Q\omega_1 v = [Q, \omega_1]\mathcal{G}u + \omega_1 Q\mathcal{G}u$.

$[Q, \omega_1]$ est à un $\mathcal{O}(C\exp(-C^{-1}\lambda^{1/s}))$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ hors d'un petit voisinage du support de $\nabla\omega_1$ qui est dans $V(\rho_0)\backslash V_1(\rho_0)$ si on choisit ω_1 correctement. $[Q, \omega_1]\mathcal{G}$ est un OIF avec le poids $-f(x,\xi)$, or $\operatorname{Re} f > 1$ dans $I \times (V(\rho_0)\backslash V_1(\rho_0))$, donc

$$(4.6)\qquad |[Q, \omega_1]\mathcal{G}u| \leq C\exp(-\mu_0\lambda^{1/s})|u|.$$

$\omega_1 Q\mathcal{G}u = \omega_1\mathcal{G}P\mathcal{F}\mathcal{G}u = \omega_1\mathcal{G}Pu + \omega_1\mathcal{G}PRu$ d'après le théorème 4, ces deux termes sont $\mathcal{O}(C\exp(-C^{-1}\lambda^{1/s}))$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. Donc

$$(4.7)\qquad |Q\omega_1\mathcal{G}u| \leq C\exp(-\mu_0\lambda^{1/s})|u| + C|\omega_1\mathcal{G}Pu| \quad \text{si } u \in C_0^\infty(I \times \mathbb{R}^n).$$

On déduit des inégalités (4.5) et (4.7) que

$$(4.8)\qquad |\omega\mathcal{G}u| \leq C\exp(-\mu_0\lambda^{1/s})|u| + C|\omega_1\mathcal{G}Pu| \quad \text{si } u \in C_0^\infty(I \times \mathbb{R}^n).$$

Or si ω_2 est supporté par $V_0(\rho_0)$,

$$(4.9)\qquad \omega_2 u = \omega_2\mathcal{F}\mathcal{G}u + \omega_2 R_1 u = \omega_2\mathcal{F}\omega\mathcal{G}u + \omega_2\mathcal{F}(\omega - 1)\mathcal{G}u + \omega_2 R_1 u.$$

On supposera que le support de ω_2 est contenu dans $V_0(\rho_0) \cap \{\omega \equiv 1\}$, ce qui donne la décroissance exponentielle du second terme de (4.7) et le fait que la norme dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ de $\omega_2\mathcal{F}$ n'exède pas $\exp(\varepsilon\mu_0\lambda^{1/s})$ car $\operatorname{Re} f < \varepsilon$ dans $I \times V_0(\rho_0)$. On a donc prouvé:

THÉORÈME 5: *Soit $s \geq 2$, soit $P(t, x, D_t/\lambda, D_x/\lambda, \lambda)$ une équation de "Cauchy-Riemann dégénérée" pseudo-différentielle à coefficients Gevrey-s, soit $\gamma(I)$ une bicaractéristique uni-dimensionnelle de p. Soit $u(x, \lambda)$ une famille bornée de distributions tempérées dont le front d'onde oscillant Gevrey-s vérifie $OF_s(u) \cap \gamma(\partial I) = \emptyset$ et $OF_s(Pu) \cap \gamma(I) = \emptyset$, alors $OF_s(u) \cap \gamma(I) = \emptyset$.*

Références

[1] L. Boutet de Monvel and P. Krée, *Pseudo-differential operators and Gevrey classes*, Annales de l'Institut Fourier **17** (1967), 295–323.

[2] L. Carleson, *On universal moment problems*, Mathematica Scandinavica **9** (1961), 197–206.

[3] N. Hanges, *Propagation of analyticity along real bicharacteristics*, Duke Mathematical Journal **48** (1981), 269–277.

[4] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators*, Volume IV, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[5] B. Lascar, *Propagation des singularités Gevrey pour des opérateurs hyperboliques*, American Journal of Mathematics **110** (1988), 413–449.

[6] N. Lerner, *Second microlocalization methods for degenerate Cauchy-Riemann equations*, Preprint, Irmar Université de Rennes 1, 2000.

[7] J. Sjöstrand, *Singularités analytiques microlocales*, Astérisque **95** (1983).

[8] J. M. Trépreau, *Sur le résolubilité des opérateurs de type principal*, Journées EDP de Saint Jean de Monts 1982, Conférence 22, Société mathématique de France, Paris, 1982.